ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

⁂

CONCOURS D'ADMISSION 1981

***

EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

PREAMBULE

N.B - Les différentes questions du problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres

1°) Par convention, pour tout réel A, $\sqrt[3]{A}$ désigne l'unique réel B vérifiant $B^3 = A$; $\sqrt[3]{A}$ est donc défini même pour A négatif et dans ce dernier cas, $\sqrt[3]{A} = -\sqrt[3]{|A|}$. Il en résulte que $f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \,.\, tgx}$ est défini pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et que $f_3(x)$ admet un développement limité à n'importe quel ordre au voisinage de 0.

2°) A titre d'information, l'origine du problème est résumé ci-dessous.

Au dix-septième siècle (et donc avant l'usage des séries), des mathématiciens (HUYGHENS, SNELLIUS, GRUNBERGER) entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires : il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < tg\, x$ valable pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ en introduisant des fonctions

a - qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.

b - peu différentes de x pour x voisin de zéro.

Les fonctions f_1 et f_4 du texte sont celles de Snellius, f_2 et f_3 sont celles de Huyghens.

°°°

1°) Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose :

$$m(a, b) = \frac{2a + b}{3} \quad , \qquad g(a, b) = \sqrt[3]{a^2 b}$$

En calculant $[m^3(a, b) - g^3(a, b)]$, trouver le signe de $[m(a, b) - g(a, b)]$ lorsque $a \neq b$. Donner une condition nécessaire et suffisante très simple pour que $m(a, b) = g(a, b)$.

.../...

2°) Dans cette question et dans toute la suite du problème, on désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; on pose :

$$f_1(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{3}(8 \sin \frac{x}{2} - \sin x) \; ;$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x . \operatorname{tg} x} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{1}{3}(2 \sin x + \operatorname{tg} x).$$

Calculer les développements limités, à l'ordre 5 inclus, de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ au voisinage de 0.

En déduire l'existence d'un réel strictement positif η tel que l'on ait, pour tout x appartenant à $]0, \eta[$, l'inégalité :

$$f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x).$$

3°) On suppose ici que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Quel est le signe de $[f_4(x) - f_3(x)]$?

4°) On pose :

$$u(x) = 3(2 + \cos x).\,[f_2(x) - f_1(x)]$$

Montrer qu'il existe des réels finis α, β, γ, δ, que l'on calculera, tels que :

$$u(x) = \alpha \sin 2x + \beta \sin \frac{3x}{2} + \gamma \sin x + \delta \sin \frac{x}{2} .$$

Calculer $u'(x)$ et vérifier que :

$$u'(x) = P(\cos \frac{x}{2})$$

où P est un polynôme de degré 4 en $\cos \frac{x}{2} = y$.

Expliciter P(y) et le décomposer en un produit de facteurs réels. En déduire le signe de $u'(x)$ et, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $f_2(x) - f_1(x)$.

5°) On pose :

$$v(x) = x - f_2(x),$$

calculer $v'(x)$ et montrer que :

$$v'(x) = Q(\cos \frac{x}{2})$$

où Q est un polynôme. En déduire le signe de $v'(x)$ et, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $v(x)$.

.../...

6°) On pose :

$$w(x) = f_3(x) - x$$

Calculer $w'(x)$; montrer que son signe est celui d'une expression trigonométrique simple ; en déduire, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, le signe de $w(x)$.

7°) Dans cette question, la valeur de π est supposée inconnue. Les valeurs des lignes trigonométriques en $\pi/4$ et $\pi/6$ sont seules connues.

Calculer des expressions simples par radicaux carrés de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ (on remarquera que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ et on appliquera les formules de soustraction trigonométriques). On aura soin de rendre les dénominateurs rationnels.

Calculer ensuite une expression de $\sin \frac{\pi}{24}$ par radicaux carrés superposés.

En déduire une expression de :

$$X = 12\, f_2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

par radicaux carrés.

Calculer une valeur décimale approchée de X avec la précision permise par les instruments dont dispose le candidat. Celui-ci indiquera le matériel utilisé.

Calculer ensuite une expression par radicaux de :

$$Y = 12\, f_3\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Calculer une valeur décimale approchée de Y, avec la précision indiquée plus haut.

Déduire des résultats précédents un encadrement de π.

Quelles remarques vous suggère le résultat (étant rappelé que Huyghens ne disposait pas des méthodes de calcul de l'analyse moderne, fondées essentiellement sur l'emploi des séries) ?

8°) On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\, dx$$

Montrer que I a un sens. La calculer. Vérifier que :

$$I > \frac{\pi^2}{8}.$$

Pouvait-on prévoir aisément ce résultat ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail